基本群で分類できる3-branchfoldの或るclass(グラフ理論と3次元多様体)

AUTHOR(S):

竹内, 義浩

数理解析研究所講究録
575巻 1985年 231-240

基本群で分類できる 3-branchfold の 或る class.

九大理学部　竹内 義浩 (Yoshihiro Takeuchi)

X を連結、可分な n 次元距離空間、b を X から自然数 $\mathbb{N}$ への関数とする。

<u>定義.</u> (X, b) が orbifold とは、任意の点 $x \in X$ に対して、x の開近傍 X_x と直交群 $O(n)$ の有限部分群 G_x が存在して、$X_x \cong \mathbb{R}^n / G_x$ かつ 任意の点 $z \in X_x$ に対して、$b(z) = \# G_x(z)$ となる時をいう。但し、$G_x(z)$ は G_x における z の isotropy subgroup を表す。

特に、M を連結, 第2可算 n 次元多様体とし、G を M 上に真性不連続に作用する群で次の条件(*)を満たすものとする。

(*) 任意の点 $z \in M$ に対して、$G(z)$-不変な開近傍 M_z と $O(n)$ の有限部分群 G_z' が存在して、$(M_z, G(z)) \cong (\mathbb{R}^n, G_z')$ となる。

この時、$X = M/G$, $b: \begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{N} \\ \Psi & & \Psi \\ x & \to & \# G(z) \end{array}$ (但し、$G \cdot z = x$.)

とすると (X, b) は orbifold となる。

Orbifold (X, b) に対し上記のような (M, G) が存在する時，(X, b) は uniformizable と言い (M, G) を (X, b) の uniformization と言う。

Σ_X を $\{x \in X \mid b(x) \geqq 2\}$ なる集合、$\Sigma^{(i)}_X$ を Σ_X の i 次元 stratum 全体の集合とする。

$\dim X = n$ とすると $\Sigma^{(n-1)}_X = \phi$ の時 (X, b) を branchfold と言う。

次のように、定義する。

$X_0 := X - \Sigma_X.$

$\Omega(X, b)$
$:= \{\mu_j \mid \mu_j$ は l_j のまわりの normal loop. $l_j \in \Sigma^{(n-2)}_X\}$

$H := \pi_1(X_0).$

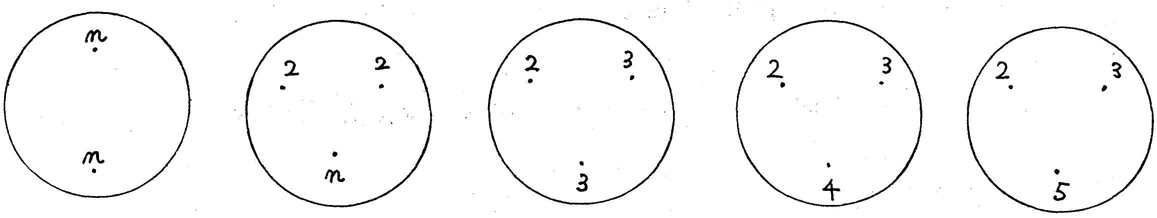
$H\langle\mu^b\rangle := \{\mu_j^{b_j} \mid \mu_j \in \Omega(X, b)\}$ を含むHの最小の正規部分群

但し，$b_j = b(l_j).$

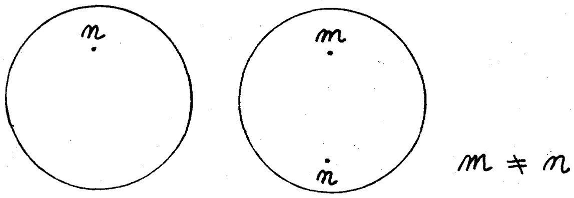
$(\hat{M}, \hat{G})$ を (X, b) の universal uniformization とする時，

$\pi_1(X, b) := \hat{G}$ であるが，これは $H / H\langle\mu^b\rangle$ と一致する。

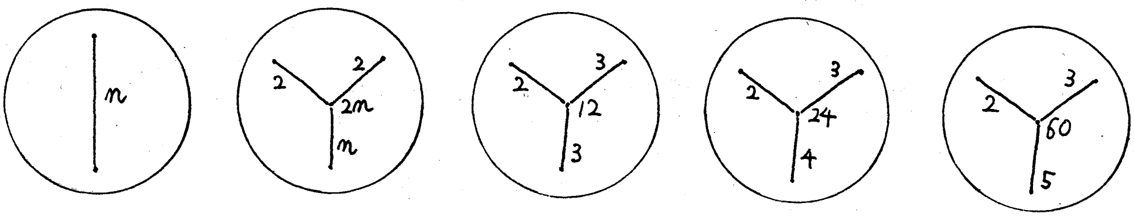
elliptic spheres



bad spheres



elliptic spheres 上の cone C (S^2, a)



以後 X として compact 3-manifold M のみを考え 3-branchfold (M, b) についてのみ考察する。

<u>定義.</u> (M, b) が irreducible とは (M, b) 内の任意の elliptic sphere がそれ上の cone を bound する時を言う。

以後 $f:(M,b) \to (N,c)$ と書いて次のような map とする。

(1) $f: M \to N$ は 連続写像。

(2) 任意の $x \in X$ に対し、$c(f(x))$は$b(x)$を割り切る。

以下の事実が成り立つ。

☆ $f_*: \pi_1(M,b) \to \pi_1(N,c)$ なる準同型が well-defined.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M,b) & \to & \pi_1(N,c) \\ \Psi & & \Psi \\ [\sigma] & \to & [f\cdot\sigma] \end{array}$$

☆ f と g が homotopic ならば $f_* = g_*$.

☆ $f(M_0) \subset N_0$ ゆえ $(f \mid M_0): M_0 \to N_0$,

$$(f \mid M_0)_\#: \pi_1(M_0) \to \pi_1(N_0)$$

が well-defined また,

f と g が homotopic ならば $(f \mid M_0)_\# = (g \mid M_0)_\#$.

<u>定義.</u> $f:(M,b) \to (N,c)$ に対して、次のように定義する。

f が proper とは任意の $x \in X$ に対して $c(f(x)) = b(x)$となる時をいう。

f が normal とは任意の $\mu \in \Omega(M,b)$に対して、ある $\nu \in \Omega(N,c)$が存在して $f(\mu)$と ν が N_0 で free homotopic となる時をいう。

f が embedding とは、$f: M \to N$ が embedding かつ f は proper である時をいう。

f が isomorphism とは、f : M → N が homeomorphism かつ f は proper である時をいう。

f が covering とは f : M → N が covering かつ f は proper である時をいう。

<u>定理.</u> (S^2, a) を an elliptic sphereとし、(M, b) を bad sphere を ふくまない 3-branchfold とする。

$f : (S^2, a) \to (M, b)$ を proper,normal かつ cone $C(S^2, a)$ に拡張できない map とするならば、ある elliptic sphere $(S^{2'}, a')$ と $C(S^{2'}, a')$ に拡張できない normal embedding $g : (S^{2'}, a') \to (M, b)$ が存在する。

次の事実が成り立つ。

☆ (S^2, a) を elliptic sphere とし、(M, b) を irreducible 3-branchfold とする時、任意の normal かつ proper な map $f : (S^2, a) \to (M, b)$ は $C(S^2, a)$ に拡張できる。

定義. (M, b), (N, c) を 3-branchfold とする。準同型

$\phi: \pi_1(M_0) \to \pi_1(N_0)$ が

normalとは、任意の $\mu \in \Omega(M, b)$ に対して、ある $\nu \in \Omega(N, c)$ が存在して、$\phi([\mu]) = [\nu]$ in $\pi_1(N_0)$ となる時をいう。

properとは、任意の $\mu \in \Omega(M, b)$ に対して、$\phi([\mu])$ の $\pi_1(N, c)$ における order $=$ $[\mu]$ の $\pi_1(M, b)$ における order となる時をいう。

次の事実が成り立つ。

☆ ϕ が proper $\Leftrightarrow$ 準同型 $\overline{\phi}$; $\begin{array}{ccc} \pi_1(M, b) & \to & \pi_1(N, c) \\ \cup\!\!\!\!\cup & & \cup\!\!\!\!\cup \\ \overline{\sigma} & \to & \overline{\phi\circ\sigma} \end{array}$

が well-defined.

命題. (M, b) を uniformizable な 3-branchfold とし (N, c) を uniformizable かつ irreducible な 3-branchfold とする。

$\phi: \pi_1(M_0) \to \pi_1(N_0)$ を proper かつ normal な準同型とすると proper かつ normal な map $f: (M, b) \to (N, c)$ が存在して、$(f \mid M_0)_\# = \phi$ かつ $f_* = \overline{\phi}$ が成り立つ。

<u>定理.</u>　(F, b), (G, c) を uniformizable な 3-branchfold とする。$f:((F, b), \partial(F, b)) \to ((G, c), \partial(G, c))$ は normal map で、f_*と$(f \mid F_0)_\#$は、単射であるとする。このとき a),b)または c)のいずれかが成り立つ。

a) homotopy $f_t:((F, b), \partial(F, b)) \to ((G, c), \partial(G, c))$ が存在して、$f_0 = f$ かつ f_1 は covering.

b) (F, b) = an annulus.

c) $(F, b) = S^2(n, n)$.

<u>定義.</u>　ω は 次の条件を みたす 3-branchfold (M, b) の class とする。

1) $\Sigma_M^{(1)} \neq \phi$.

2) (M, b) は irreducible.

3) (M, b) は uniformizable.

4) $\partial(M, b)$ の 任意の component (F, b) に対して

$$\mathrm{Ker}(i_*: \pi_1(F, b') \to \pi_1(M, b)) = 1.$$

5) $\partial(M - U(\Sigma_M))$ は incompressible.

<u>定義.</u> $f:(M,b) \to (N,c)$ が fully normal とは、任意の $\nu \in \Omega(N,c)$に対して、ある$\mu \in \Omega(M,b)$が存在して、$f(\mu)$ と ν が N_0 で free homotopic となる時をいう。

<u>定理.</u> (M,b), (N,c) を ω に属する 3-branchfolds とする。$f:((M,b), \partial(M,b)) \to ((N,c), \partial(N,c))$ を fully normal な map で, f_* と $(f \mid M_0)_\#$ は 単射 かつ $f(\partial(M,b)) = \partial(N,c)$ とする時 a) または b) が成り立つ。

a) covering $g:(M,b) \to (N,c)$ が存在して、 $g_* = f_*$ かつ $(g \mid M_0)_\# = (f \mid M_0)_\#$.

b) $M - U(\Sigma_M) =$ a closed surface $\times$ I.

<u>定義.</u> (M,b), (N,c) を 3-branchfold とする。準同型 $\phi: M_0 \to N_0$ が fully normal とは、任意の$\nu \in \Omega(N,c)$に対して ある$\mu \in \Omega(M,b)$が存在して、$f_*([\mu]) = [\nu]$ in $\pi_1(N_0)$ となる時をいう。

<u>定義.</u> 準同型 $\phi:\pi_1(M,b) \to \pi_1(N,c)$ が

peripheral であるとは $\partial(M,b)$ の任意の component (F,b') に対して、$\partial(N,c)$ のある component (G,c') と $\pi_1(G,c')$ のある subgroup A が存在して、$\phi(i_*\pi_1(F,b'))$ と $j_*(\pi_1(G,c'))$ が $\pi_1(N,c)$ で共役となる時をいう。

fully peripheral であるとは、ϕ は peripheral かつ、$\partial(N,c)$ の任意の component (G,c') に対して、$\partial(M,b)$ のある component (F,b') が存在して、$\phi(i_*\pi_1(F,b'))$と $j_*(\pi_1(G,c'))$が $\pi_1(N,c)$ で共役となる時をいう。

<u>系.</u> (M,b), (N,c) を ω に属する 3-branchfolds とする。

fully normal かつ proper な 同型 $\phi:\pi_1(M_0) \to \pi_1(N_0)$ が存在して、$\phi:\pi_1(M,b) \to \pi_1(N,c)$ が fully peripheral な同型となる時、isomorphism $f:(M,b) \to (N,c)$ が存在する。

参考文献

[1] J. Hempel, 3-manifolds, Annals of Math. Studies No. 86.

[2] M. Kato, On proper transformation groups on manifolds, Preprint.

[3] W. Thurston, The geometry and topology of three manifolds, Mimeograph.

[4] F. Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficientry large, Annals of Math. 87(1968) 56-88.